

INTERPOLACION DE BIRKHOFF A PARTIR DE UNA FORMULACION VARIACIONAL
ASOCIADA AL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

J. CARDONA, A. SAMARTIN

Departamento: Analisis de Estructuras

E.T.S. de Ingenieros de Caminos

Universidad de Santander

RESUMEN

El problema de la interpolacion polinomial de Birkhoff, como es conocido, no siempre admite solucion. Se presenta un metodo como alternativa a este tipo de problemas para la obtencion de interpolantes con unas condiciones de continuidad determinadas y en el cual el criterio de aproximacion es el de minimizacion de un cierto funcional real utilizando el metodo de los elementos finitos. Se analiza la eficiencia del método en diversos ejemplos de aplicacion 1-D y 2-D.

1.-INTRODUCCION

Existen numerosos problemas en la Ciencia y en la Tecnica que precisan para su resolucion la utilizacion de procedimientos de interpolacion, como por ejemplo:

- a) En la fabricacion automatizada de objetos mecanicos existe la necesidad de algoritmos que permitan pasar de un diseño definido por un conjunto de datos puntuales mas unas condiciones de estetica y/o aerodinamicas, etc., a la realizacion de la forma continua.
- b) En el trazado de vias de comunicacion puede ser interesante el diseño del eje de forma que sea lo mas suave posible (condicion de comodidad y seguridad de la circulacion) y ademas satisfaga una serie de datos puntuales exactamente o dentro de un entorno de error.

Se trata aqui el problema de interpolacion y aproximacion de funciones 1-D y 2-D con un orden de continuidad C^k a partir de un conjunto de datos de Birkhoff sobre un conjunto Ω y con la condicion de minimizacion de un determinado funcional cuadrático.

Despues del planteamiento general en R^n se pasa a una formulacion 1-D y 2-D con distintos ejemplos de aplicacion, comparandose la solucion exacta con la generada por el metodo.

2.-PLANTEAMIENTO GENERAL

Sea Ω un dominio acotado de R^N . $W_2^m(\Omega)$ el espacio de las funciones $u \in L_2(\Omega)$ cuyas derivadas de orden $\leq m$ son de $L_2(\Omega)$, con el producto escalar

$$(u, v)_{W_2^m(\Omega)} = \sum_{|i| \leq m} (D^i u, D^i v)_{L_2(\Omega)}$$

$$D^i u = \frac{\partial^{|i|} u}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_N^{i_N}}, \quad |i| = i_1 + i_2 + \dots + i_N$$

constituye un espacio de Hilbert [1], [2]

Dada la sucesión de formas lineales continuas sobre $W_2^m(\Omega)$ L_i $1 \leq i \leq n$ y los datos $r = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in R^n$, encontrar una función $u \in W_2^m(\Omega)$ que satisfaga

$$L_i(u) = r_i \quad 1 \leq i \leq n$$

y además minimice el funcional real

$$Fu = \int_{\Omega} \sum_{|i| \leq m} a_i(x) (D^i u)^2 dx \quad (1)$$

con $a_i(x)$ funciones reales, medibles Lebesgue y acotadas $a_0(x) > 0$
 $a_i(x) \geq 0$ y $m > 0$.

3.-FORMULACION 1-D

(3.1)- Enunciado

Dados los nodos de interpolación $a \leq x_1 < \dots < x_n \leq b$ y los números reales r_{ik} $1 \leq i \leq n$, $0 \leq k \leq k_i$ donde k_i indica el máximo orden de derivación en el nudo i . La determinación de una función $u \in P(a, b)$ que interpolen los datos

$$u^k(x_i) = r_{ik} \quad (n \text{ ecuaciones}) \quad (2)$$

y cumpla la condición

$$\int_a^b \left(\frac{d^n u}{dx^n} \right)^2 dx = 0 \quad (3)$$

constituye un problema típico de interpolación polinómica dentro del cual se pueden distinguir los siguientes casos:

- 1) Si $k_i = 0 \quad \forall i$, es un problema de Lagrange.
- 2) Si la sucesión $0 \leq k \leq k_i$, no tiene salto, se trata de un problema de Hermite.
- 3) Si $x_i = x_1$ (un solo nudo) y la sucesión $0 \leq k \leq k_i$ es interrumpida, estaremos en el problema de Taylor.

En general se tiene el problema de interpolación de Birkhoff.

Como es conocido [3], existe solución única de (2) para los tres casos y además hay métodos de construcción del polinomio interpola-

dor. Mientras que en el caso general para la interpolación de Birkhoff no se puede asegurar lo mismo [4]. Por otra parte, un serio inconveniente a la interpolación polinómica en un gran número de puntos se debe a que el error de interpolación puede aumentar con el grado del polinomio [3][5].

Una extensión a este problema corresponde a sustituir la condición (3) por la de que el siguiente funcional real sea mínimo

$$F_u = \int_a^b \sum_{i=0}^m a_i(x) (u^{(i)})^2 dx \quad (4)$$

con a_i suficientemente uniformes y no negativos en $[a, b]$, $a_0(x) > 0$ y m t.q $|F_u| < \infty$

La integral (4) tiene sentido en el espacio $W_2^m(a, b)$. El problema entonces se puede formular

$$\min(F_u, u \in U) \quad U = \{u \in W_2^m(a, b), u^{(k)}(x_i) = r_{ik}\}$$

(3.2) - Método de los elementos finitos

Es una particularización del método de Ritz y permite generar una solución aproximada de la forma

$$u_n(x) = \sum_{j=1}^n u_j \phi_j(x)$$

en un subespacio finitodimensional $V_n \subset W_2^m(a, b)$ mediante una elección muy concreta de las funciones base $\phi_j(x)$.

Se discretiza el dominio $\Omega = [a, b]$ en NE elementos, obteniendo así el dominio

$$\Omega_h = \bigcup_{e=1}^{NE} \Omega_e$$

El método conduce al sistema global

$$K_{11} U_1 = -K_{1i} U_i$$

donde el vector de incógnitas U_1 contiene los grados de libertad libres asociados a cada nudo. Los subíndices 1 e i varían entre los g.d.l. libres e impuestos respectivamente. De las propiedades de la forma (4) se deduce que la matriz de rigidez K_{11} es simétrica, definida positiva e invertible, por tanto el sistema es únicamente resoluble para cada $n > 0$, así como la convergencia de la sucesión de Ritz $u_n(x)$ a la solución exacta, ([1], [2], [6] [7]).

$$U_1 = K_{11}^{-1} (-K_{1i} U_i)$$

El valor del mínimo se obtiene al sustituir ésta en la expresión del funcional (4)

Este metodo permite generar interpolantes $u_n(x)$ de clase C^∞ en el dominio de cada elemento, pero con un orden de continuidad en los nudos C^K - $K = \min l_i$ determinado por el tipo de elemento utilizado.

Se puede reducir el orden de continuidad K en un nudo si se disminuye el numero de g.d.l. asociados a ese nudo. Sin embargo es posible - sin necesidad de modificar las funciones de forma - variar el orden de continuidad y el crecimiento del interpolante en un punto x_i al asociar dos nudos a la misma posicion x_i , con lo cual se independizan los g.d.l. correspondientes, e imponiendo ademas las condiciones requeridas.

Este hecho se puede aprovechar para aproximar funciones con discontinuidades puntuales. Un caso tipico corresponde a las soluciones fundamentales de problemas con valores de contorno (funciones de Green) que presentan discontinuidades de este tipo [10].

(3.3)-Ejemplo de aplicacion

Encontrar $u(x)$, $x \in [-1, 1]$ t.q.

$$\begin{aligned} u(-1) &= 1 \\ u'(0) &= u'_0 \quad (\text{dato}) \\ u(1) &= 1 \end{aligned} \quad (5)$$

y minimice los siguientes funcionales

$$F_u = \int_{-1}^1 (a_0 \cdot u^2 + a_1 \cdot u'^2 + a_2 \cdot u''^2) dx$$

En general este problema de interpolacion (5) no admite solucion por polinomios $p \in P_2[-1, 1]$, ya que el determinante del sistema

$$\begin{aligned} p(-1) &= 1 \\ p'(0) &= u'_0 \\ p(1) &= 1 \end{aligned}$$

es igual a cero.

Con la condicion de suavidad introducida en la minimizacion de F se aporta una solucion a este problema.

Se ha utilizado una malla formada por dos elementos de igual longitud con distintos gdl asociados a cada nudo (Fig. 1)

Variando el dato u'_0 , el numero de gdl y los coeficientes a se obtienen distintos casos de estudio. Algunos resultados se presentan en la Tabla 1

Se observa un aumento en la exactitud con el orden de los elementos (casos $\int_{-1}^1 u^2 + u'^2 dx$, $\int_{-1}^1 u^2 dx$). Con el funcional $\int_{-1}^1 u'^2 dx$, solo admite solucion clasica (solucion ec. Euler) con $u'_0 = 0$, sin embargo se da una solucion aproximada. Finalmente en $\int_{-1}^1 u''^2 dx$ se observa el acuerdo entre las dos soluciones si se utilizan elementos de orden 3 (polinomios -

de tercer grado), no así para otros ordenes.

(3.4)-Ejemplo de aplicacion

Conocidos una serie de datos de una funcion $f(x)$ en $[0, \pi]$ correspondientes a valores de la funcion y derivadas de orden ≤ 2 (datos de Birkhoff) en distintos puntos del intervalo, se trata de obtener la funcion $u(x)$ que los satisface y minimiza los funcionales

$$Fu = \int_0^{\pi} a_0 u^2 + a_1 u'^2 + a_2 u''^2 + a_3 u'''^2 dx$$

En la Tabla 2 se presentan los resultados obtenidos con una malla formada por 41 nodos igualmente espaciados y elementos C^2 . Los casos 4, 5, 6 corresponden a datos aleatorios, mientras que en los tres primeros se ha optado por una distribucion mas regular, con un porcentaje de datos mayor para los gdl de orden mas bajo..

Se observa el incremento de la calidad de la aproximacion con el numero de datos. Así, con un rendimiento del 36.59% se obtiene una exactitud hasta la cuarta cifra decimal.

A continuacion se ha estudiado el efecto de una discontinuidad de salto en la derivada primera. Los datos corresponden ahora a la funcion $f(x) = |\sin x|$ en $[0, \pi/2]$ y

$$Fu = \int_0^{2\pi} a_0 u^2 + a_1 u'^2 + a_2 u''^2 dx$$

La malla utilizada consta de 42 nudos y elementos C^2 . Los gdl asociados a los nudos 21 y 22 se han independizado al imponer $x_{21} = x_{22}$. Existe sin embargo la posibilidad de hacer coincidir alguno de estos gdl, obteniendose así los casos de analisis indicados en la Tabla 3.

En la Tabla 4 se observan los resultados obtenidos con distintas distribuciones de datos.

Conclusiones similares al caso anterior se aplican aquí. Por otra parte con el mismo numero de datos, se obtienen mejores resultados al imponer el valor de la funcion en el nudo que presenta discontinuidad.

En las Figs. 3 y 4 se ilustran las soluciones aproximadas para los casos indicados en las Tablas 2 y 4 respectivamente.

4-EXTENSION A PROBLEMAS 2-D

(4.1)-Enunciado

Dado el conjunto de puntos del plano p_i $1 \leq i \leq N$ y los números reales $r_{1-k,1}^i$, se trata de encontrar una función u dentro del espacio de funciones admisibles $W_2^m(\Omega)$ que satisfaga

$$\frac{\partial^{1-k} u(p_i)}{\partial x^{1-k} \partial y^k} = r_{1-k,1}^i \quad 0 \leq k \leq k_i, \quad 0 \leq k \leq l \text{ (sucesión interrumpida, datos de Birkhoff)}$$

con k_i el máximo orden de derivación asociado al punto p_i , y minimice el funcional

$$Fu = \int_{\Omega} a_{00} u^2 + a_{10} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + a_{01} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + a_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial x \partial y} \right)^2 + \dots + a_{0m} \left(\frac{\partial^m u}{\partial y^m} \right)^2 d\Omega$$

Existen configuraciones concretas de n puntos de R^2 y espacios finitodimensionales de polinomios de manera que el correspondiente problema de Hermite o Lagrange tiene solución única ([3][8]). Se sabe también que (como en el caso 1-D) al añadir nuevos nudos, más que aumentar el grado del polinomio, conviene subdividir Ω en elementos

(4.2)-Metodo de los Elementos Finitos

El método sigue una pauta similar a la descrita anteriormente por lo que no se expone. Cabe indicar que se ha empleado una metodología más directa desde el punto de vista numérico. Asimismo se ha utilizado la familia de hiperelementos C^K extraclase H [9] como elementos finitos. En la Fig 5 se representan las funciones de forma de un hiperelemento típico.

(4.3)-Ejemplo de aplicación

Con objeto de comprobar la eficiencia de esta interpolación 2-D se ha estudiado la interpolación de una serie de datos de Birkhoff correspondientes a la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ en $[0,1] \times [0,1]$.

Únicamente se presentan los resultados obtenidos con el hiperelemento $K=1, H=1$ (Fig 5), de clase C^1 y la malla de 50 elementos indicada en la Fig 6. La Tabla 5 corresponde a una distribución de datos con mayor porcentaje para los gdl de orden inferior. Y la Tabla 6 a una distribución

aleatoria .La Figura 7 representa los cortes por planos $z=\text{cte.}$ con la superficie interpolante para el caso indicado en la Tabla 6

Se observan mejores resultados al imponer un mayor peso en el funcional a los gdl que aparecen en menor porcentaje como datos de entrada -

Asimismo se ha notado el incremento en la exactitud de los resultados con el orden de los elementos.

El metodo puede extenderse utilizando elementos de mayor orden de continuidad, pero con un mayor coste de calculo, debido entre otros aspectos al aumento del ancho de banda y a un mayor numero de puntos de Gauss en la integracion numerica; pero con la ventaja de una mayor aceleracion de la convergencia.

REFERENCIAS

- [1] K. Rektorys. "Variational methods in Mathematics Science and Engineering" D. Reidel. (1980).
- [2] J.L. Lions. "Optimal control of systems governed by partial differential equations". Springer Verlag. (1971).
- [3] J.M. Sanz Serna . "Interpolacion y minimos cuadrados". Dpto. Ecuaciones- Funcionales. Universidad de Valladolid. (1980)
- [4] G.G. Lorentz, K. Jetter, S.D. Riemenschneider. "Birkhoff Interpolation". Addison-Wesley. (1983).
- [5] M. Crouzeux, A.L. Mignot. "Aproximation des fonctions d'une variable reele par des polynomes". Ed. Masson. (1984).
- [6] A.F. Samartin. "Aplicacion del m.e.f. al analisis estructural de tableros de puentes". Discurso inaugural curso 1979-80. Universidad de Santander.
- [7] G.F. Carey, J.T. Oden, "Finite Elements, a second course". Vol II. Prentice Hall (1983).
- [8] M. Gasca, J.I. Maeztu "On Lagrange and Hermite interpolation in R^k " Numer. Math. 39, 1-14. (1982).
- [9] A.F. Samartin. "Dessarrollo de familias jerarquicas de elementos finitos de clase C^k ". VI CEDYA. Jaca (Huesca). (1983)
- [10] Courant and Hilbert . "Methods of Mathematical Physics". Vol I. Interscience Publishers. (1953)

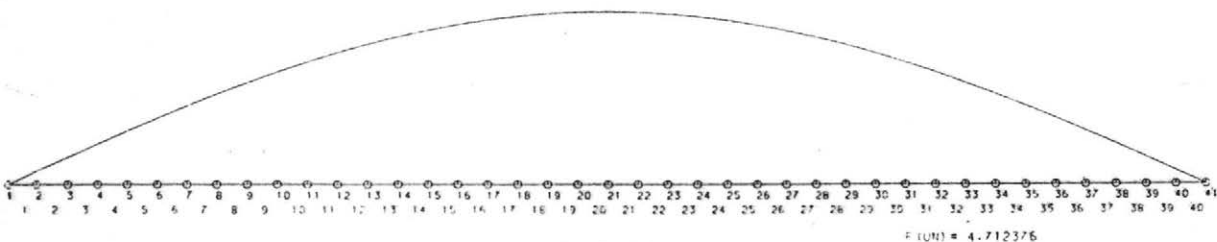


Fig 3 Solucion aproximada

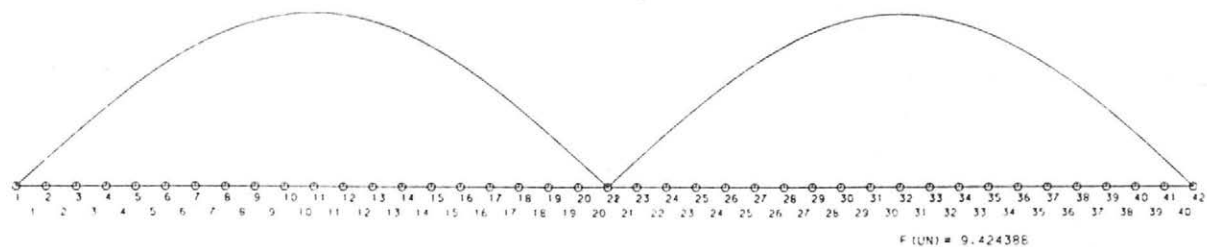
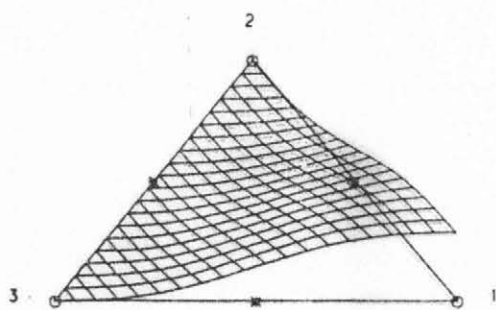
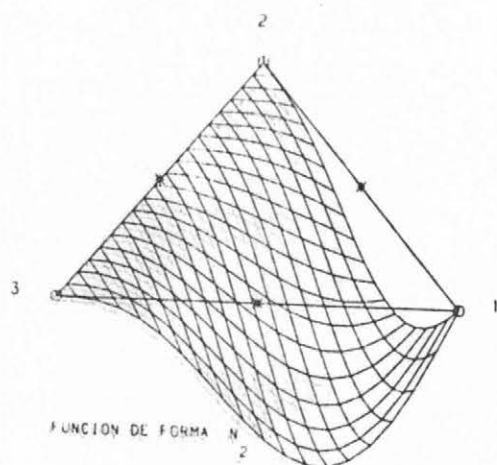


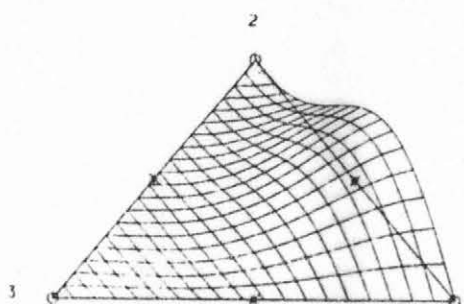
Fig 4 Solucion aproximada



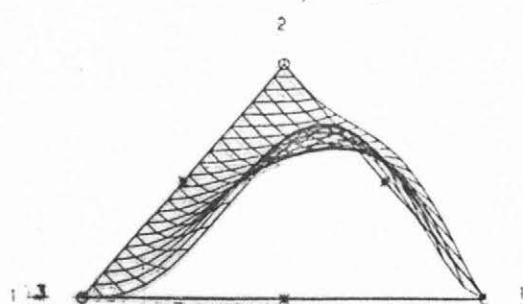
FUNCION DE FORMA N_1



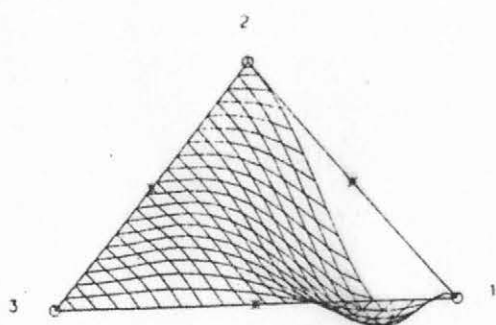
FUNCION DE FORMA N_2



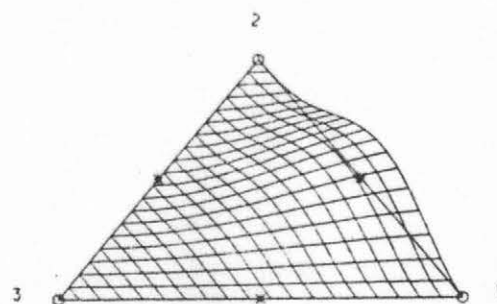
FUNCION DE FORMA N_3



FUNCION DE FORMA N_4

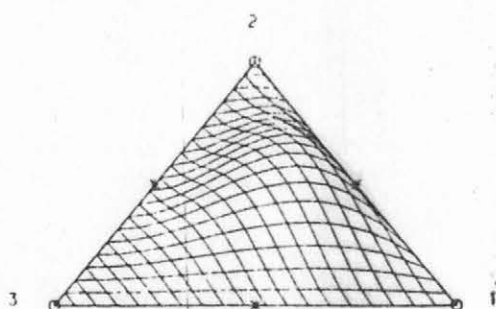


FUNCION DE FORMA N_5



FUNCION DE FORMA N_6

$\odot = Z, ZX, ZY, ZXX, ZXY, ZYY$
 $\otimes = ZN1$



FUNCION DE FORMA N_7

Fig 5 Funciones de forma
hiperelemento $K=1$ $H=1$

FUNCIONAL $a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3$	CASO	RENDIMIENTO NUMERO DATOS/NUMERO GDL (%)	SOLUCION APROXIMADA F_u	SOLUCION EXACTA	
				F_f	$f(x)$
1 1 1 0	1	14.63	4.71138	4.71239	senx
	2	20.33	4.71219		
	3	36.59	4.71238 (Fig.3)		
	4	14.63	4.71017		
	5	20.33	4.70998		
	6	36.59	4.71234		
0 0 1 0	1	14.63	1.57068	1.57089	senx
	2	20.33	1.57077		
	3	36.59	1.57079		
	4	14.63	1.57055		
	5	20.33	1.57029		
	6	36.59	1.57079		

Tabla 2 Resultados ejemplo de aplicacion 1-D

CASO	CONDICIONES EN LA DISCONTINUIDAD					
	$u(x_{21})$	$u(x_{22})$	$u'(x_{21})$	$u'(x_{22})$	$u''(x_{21})$	$u''(x_{22})$
1	impuestos (dato)		independientes		iguales	
2	iguales		independientes		independientes	
3	independientes		independientes		iguales	

Tabla 3 Casos de analisis

FUNCIONAL $a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3$	MALLA	CASO	NUM.DATOS NUM.G.D.L.	VALOR DE FU		
				APROXIMADO	EXACTO	
1 1 1 0	1	1	36.51	9.42439	9.42478	Fig.4
		2	34.92	9.39950		
		3	34.92	9.39950		
	2	1	36.51	9.42141		
		2	34.92	9.39123		
		3	34.92	9.39035		

Tabla 4 Resultados interpolacion 1-D, $f(x) = |\text{sen } x|$

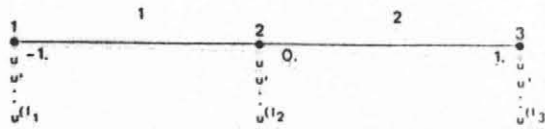


Fig 1 Malla con distintos q.d.f./nudo

FUNCIONAL	DATOS	ODE/NUDO			VALOR DE P_u		SOLUCION EXACTA
		NUDO1	NUDO2	NUDO3	APROXIMADO	EXACTO	
$\int_{-1}^1 u'' u'^2 dx$	$u(x_1)=1$	1	2	1	1.52381	1.52319	$(e^{-x} - e^x)$ $(e^{-1} - e)$ $x \in [-1, 1]$
	$u'(x_2)=0$	2	2	2	1.52321		
	$u(x_3)=1$	3	3	3	1.51319		
	$u'(x_2)=1$	4	4	4	1.52319		
$\int_{-1}^1 u^2 dx$	$u(x_1)=1$	2	2	2	0.15385 fig 2a	0.00000	$0.12 [-1, 1]$
	$u'(x_2)=0$	3	3	3	0.06061 fig 2b		
	$u(x_3)=1$	4	4	4	0.03704 fig 2c		
	$u(x_1)=1$	2	2	2	0.16218		
	$u'(x_2)=1$	3	3	3	0.07028		
	$u(x_3)=1$	4	4	4	0.03863		
$\int_{-1}^1 u'^2 dx$	$u(x_1)=1$	2	2	2	0.00000	0.00000	$1 \times 1.2 [-1, 1]$
	$u'(x_2)=0$	3	3	3	0.00000		
	$u(x_3)=1$	4	4	4	0.00000		
	$u'(x_2)=1$	2	2	2	0.25000		
$\int_{-1}^1 u''^2 dx$	$u(x_1)=1$	2	2	2	0.00000	$6u_0'^2$	
	$u'(x_2)=0$	3	3	3	0.00000		
	$u(x_3)=1$	4	4	4	0.00000		
	$u'(x_2)=1$	2	2	2	6.00000		

TABLA 1 .- Resultados ejemplo de aplicación 1-D

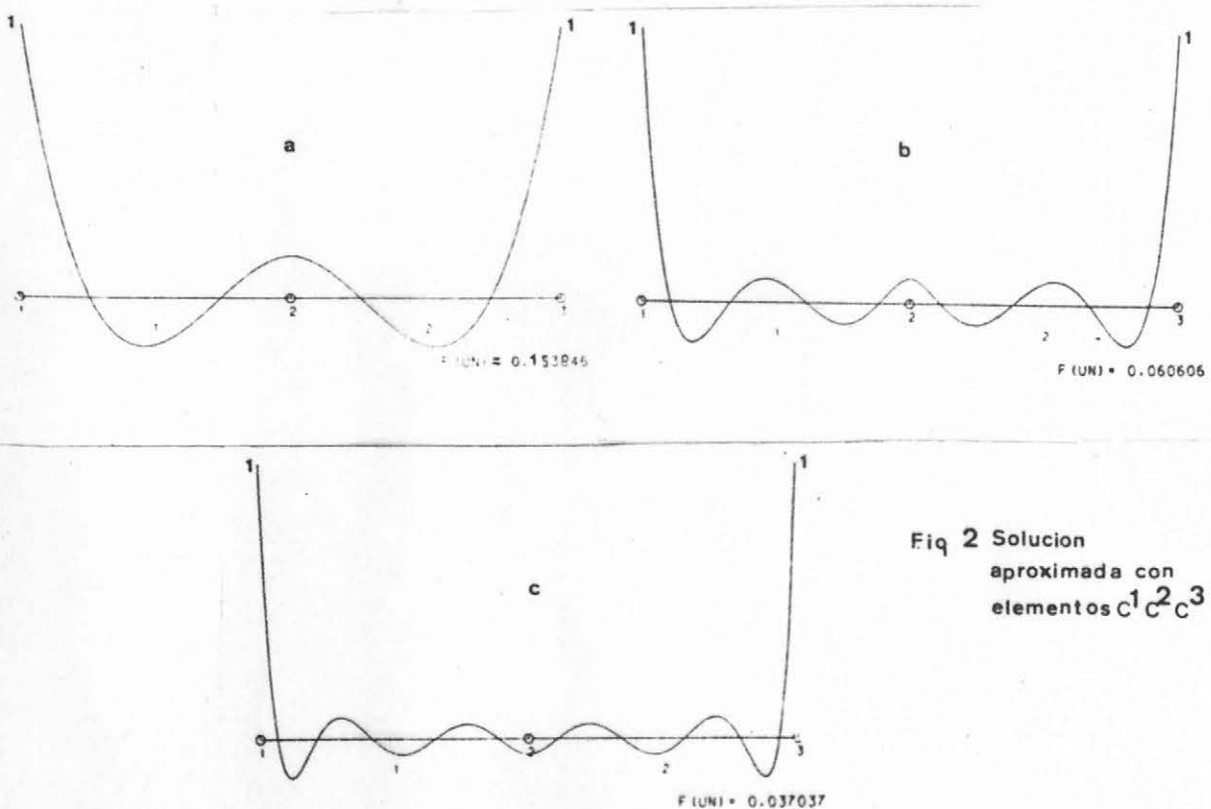


Fig 2 Solucion aproximada con elementos $C^1 C^2 C^3$

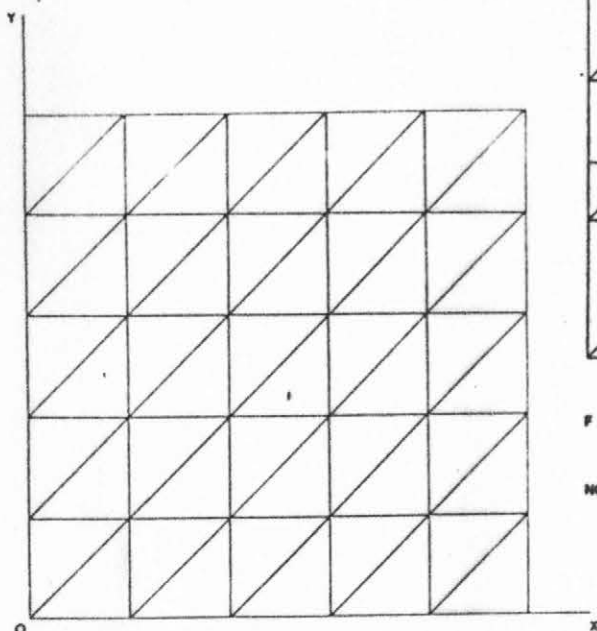
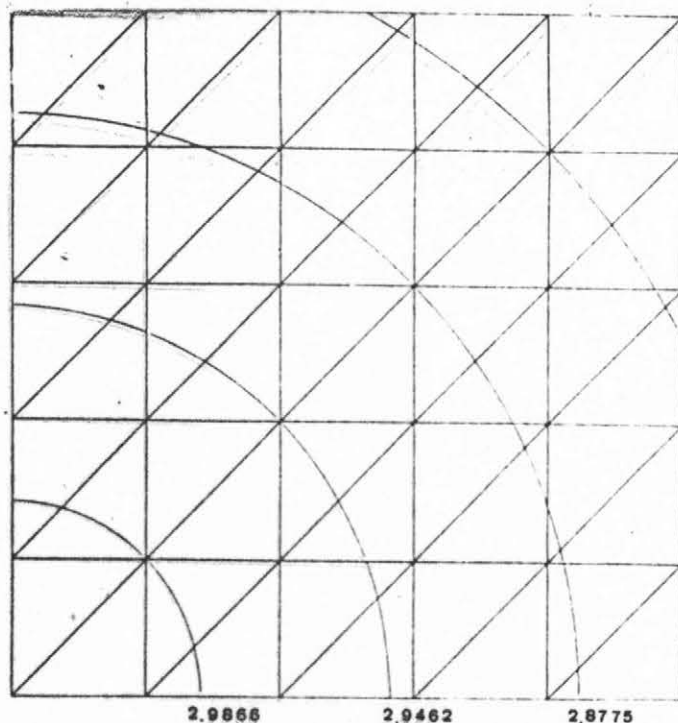


Fig 6 Malla de elementos finitos



$$F(uN) = 8.6708$$

$$NCARG/NGDL = 0.6645$$

Fig 7 Solucion aproximada

MALLA: NE=50				
FUNCIONAL	RENDIMIENTO Nº DATOS/Nº GDL (%)	VALOR DE F_u		OBSERVACIONES
		APROXIMADO	EXACTO	
$\int_{\Omega} (u^2 + u_x^2 + u_y^2 + u_{xx}^2 + u_{xy}^2 + u_{yy}^2) d\Omega$	32.22	8.64769	8.67850	
	55.48	8.67287		
$\int_{\Omega} (u_{xx}^2 + u_{xy}^2 + u_{yy}^2) d\Omega$	32.22	0.23324	0.26232	
	55.48	0.25718		

Tabla 5 Resultados ejemplo 2-D

MALLA: NE=50				
FUNCIONAL	RENDIMIENTO Nº DATOS/Nº GDL (%)	VALOR DE F_u		OBSERVACIONES
		APROXIMADO	EXACTO	
$\int_{\Omega} (u^2 + u_x^2 + u_y^2 + u_{xx}^2 + u_{xy}^2 + u_{yy}^2) d\Omega$	43.19	8.65720	8.67850	fig 7
	55.48	8.66791		
	65.45	8.67083		

Tabla 6 Resultados 2-D(datos aleatorios)

TITULO: FRECUENCIAS DE SCATTERING EN EL PROBLEMA DE VIBRACION DE UN CUERPO VISCOELASTICO INMERSO EN UN FLUIDO COMPRESIBLE DE PEQUEÑA DENSIDAD.

AUTOR(ES): J.CAIZOS.

CENTRO DE TRABAJO: Universidad de Santiago de Compostela.

RESUMEN: Se pretende estudiar las frecuencias propias de vibración de un sistema formado por un cuerpo viscoelástico que ocupa un dominio acotado de \mathbb{R}^3 , rodeado de un fluido de pequeña densidad $\epsilon \rightarrow 0$ que llena el dominio exterior. Sea ω_0 un elemento del espectro discreto del problema de vibración del cuerpo viscoelástico en el vacío tal que su multiplicidad algebraica es $m < \infty$. Se demuestra que si ϵ es suficientemente pequeño, existen exactamente m frecuencias propias $\omega^i(\epsilon)$ convergentes, cuando $\epsilon \rightarrow 0$, a ω_0 . La multiplicidad algebraica total es m .

TITULO: INTERPOLACION DE BIRKHOFF A PARTIR DE UNA FORMULACION VARIACIONAL ASOCIADA AL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.

AUTOR(ES): J.CARDONA PARDO Y A.SAMARTIN QUIROGA.

CENTRO DE TRABAJO: Universidad de Santander.

RESUMEN: Como es conocido, no siempre admite solución el problema de interpolación polinómica de Birkhoff. En este trabajo se presenta un método como alternativa a este tipo de problemas para la obtención de interpolantes con unas condiciones de continuidad determinadas y en el cual el criterio de aproximación es el de minimización de un cierto funcional real utilizando el método de los elementos finitos. Se describe el método empleado y se analizan diversos ejemplos de aplicación para las situaciones 1-D y 2-D.